Georges BARTHÉLEMY

# LES UNIVERS MATHÉMATIQUES

Il a été fait valoir* que les mathématiques, qui sont tenues pour une science, se présentent comme un discours portant sur des objets. À condition d'élargir cette perspective, des conséquences pratiques peuvent en être tirées. Rappelons d'abord à grands traits de quoi il s'agit.

Depuis un siècle, surtout depuis Bourbaki en France, règne une sorte de doctrine officielle selon laquelle les mathématiques, dans leur essence, ne seraient qu'un jeu formel de langage, essentiellement symbolique. Les mathématiques qui s'utilisent, celles qui s'enseignent et même celles qui occupent le chercheur ne seraient que des bâtardes. Il y aurait donc pis encore, puisqu'il est aussi des mathématiques toutes de pratique, faites de règles de calcul chiffresque par exemple ; ce ne sont là que des techniques, utiles et efficaces, au mieux un art. Les mathématiques formelles font semblant de parler d'objets. Seul y importe le texte dépourvu de sens, la composition symbolique des lignes et les règles de passage d'une ligne à l'autre. Cette position, humainement intenable, présente l'intérêt d'être liée à la mécanisation. Considérons donc qu'il s'agit d'une forme possible de mathématiques, mais retournons vers les « vraies » , celles qui occupent la pensée des mathématiciens, qu'ils soient en herbe ou chevronnés, celles qui se présentent comme connaissance d'objets idéaux.

Les idées exposées ici relèvent de la conception, d'inspiration transformiste, qu'il a été proposé d'appeler constitutionnisme. Elle refuse aux objets une existence réelle, que ce soit au sens des objets matériels familiers ou au sens des Idées platoniciennes. Leur existence comporte sa part d'illusion, créée par certaines dispositions de notre esprit. Les objets n'en présentent pas moins de la stabilité, ils font l'accord des esprits et, en outre, ils donnent prise sur les réalités extérieures, physiques ou autres. Ils doivent ces caractères à la démarche constitutive, dans laquelle on mêle toutes sortes de choses en fonction des buts poursuivis. Les décrets, en particulier, pour donner un nom commode aux différents actes de volonté qui participent à cette constitution, sont la cause de la stabilité et de l'accord. Les objets mathématiques, pour résumer par une analogie qui doit peu au hasard, présentent le même mode de réalité que les personnes morales : une société anonyme n'a rien de matériel ; elle existe néanmoins, à sa façon, sans se confondre avec ses actionnaires.

Au-delà des objets s'aperçoit un cadre, un univers dirons-nous, dans lequel ils baignent et qui règle l'activité mathématique. L'idée d'une libre constitution s'applique aussi à lui et l'histoire révèle ses évolutions. La prise en considération de ces dernières rend plus sensible à l'existence et à l'arbitraire de l'univers dont nous sommes trop familiers. En outre, le collégien, le lycéen, l'étudiant et le chercheur n'ont pas affaire au même, et, pour chacune de ces corporations, plusieurs sont envisageables. Voici quelques observations et quelques pistes de réflexion à leur sujet.

La pensée du mathématicien porte sur des objets conçus comme ayant une certaine existence, si troublante soit celle-ci. Un discours, que l'on peut qualifier d'officiel, en déploie la connaissance : axiomes, définitions et théorèmes disent ce que sont ces objets et quelles sont leurs propriétés. Le savoir-faire qui en dérive, si nécessaire et important soit-il par ailleurs, ne fait pas partie de ce discours : on démontre « en cours » le théorème du signe du trinôme ; on apprend « en exercices » à résoudre les inéquations du second degré. Quoique fondé en science, ce savoir-faire rejoint, à cet égard, la pratique la plus humble, celle du calcul, se limitât-elle à savoir compter. On peut d'ailleurs

* Dans *Les Mathématiques, art, science et langage*.

appliquer une technique de résolution sans rien connaître de la théorie du trinôme. Cette séparation entre savoir (signe du trinôme) et savoir-faire (résolution de l'inéquation), n'est pas si ancienne que cela puisque bien des traités ont réparti leurs propositions en théorèmes et problèmes, sur l'illustre modèle des Éléments. Un problème, ainsi entendu, énonce une démarche de résolution et en démontre la pertinence.

Pour ce qui est de la théorie, deux sont présents ; appelons-les le maître et le disciple. Le premier est la personne censée tenir le discours, le second étant celle qui le reçoit. Tout se passe comme si un premier personnage, disposant du savoir, posait (notions premières, postulats et axiomes), définissait (les notions dérivées), énonçait et démontrait (les théorèmes) ; et qu'un second acceptât, admît, enregistrât et vérifiât. Le disciple, parti des commencements et ayant suivi le chemin proposé, ne sait véritablement que ce qu'il a accepté et ce qu'il a vérifié chaque fois qu'il y avait lieu. Ces personnages ne coïncident pas tout à fait avec les personnes réelles. Lorsqu'un lecteur apprend un théorème sans avoir vérifié sa démonstration, il n'est pas réputé le savoir véritablement, il n'est pas disciple à proprement parler. Ces personnages comportent aussi une dimension collective : le maître parle au nom de tous les mathématiciens ayant acquis et validé les connaissances qu'il expose.

Le maître tient un discours de vérité. Celle-ci, comme toujours, est adéquation de la pensée et de la réalité ; évidemment pas adéquation absolue ; congruence serait plus juste. Et ceci n'est nullement incompatible avec le fait que, en mathématiques, toute vérité est supposition ; ni avec celui que toute supposition induit une vérité, à sa place dans une hiérarchie (postulats ou axiomes, hypothèses principales, hypothèses subordonnées). La raison en est que la réalité mathématique relève des positions et suppositions qui contribuent à la créer. Les assertions, axiomes et théorèmes au premier chef, ne sont donc pas seules en charge de la vérité : les suppositions, mais aussi les définitions, en introduisent une partie, méritant ainsi l'appellation de quasi-assertion*. Longtemps des actes, en outre, étaient intégrés au discours : les Postulats des Éléments fixent des actes autant que des vérités. Un savoir-faire, en somme, avait pu prendre place dans le savoir. Ces actes ont été transmutés en propriétés, mettant du même coup un plus grand écart entre la théorie et les pratiques. Les fameux Problèmes ont disparu ; toute Proposition est désormais un Théorème.

Le temps aussi a tendance à disparaître, sous la double influence du formalisme et de l'ensemblisme. Le temps du discours ne peut être éliminé : un énoncé y vient après un autre. Celui des objets et celui des actes l'ont été considérablement. Il y en a un dans le comptage, qui a toujours été le fondement de l'arithmétique, et que l'axiomatique péanienne a remplacé par une fonction de succession. Il y en eut un, quoique dépourvu de mesure, en géométrie, celle-ci n'ayant pas rechigné à envisager des mouvements pour ses corps. Il y en eut un aussi en analyse, deux siècles durant ; les limites furent initialement celles de quantités fluentes et les fluxions newtoniennes furent des vitesses.

Les objets géométriques ont évolué sous bien d'autres rapports, avant de perdre leur autonomie. Ils étaient points, lignes, surfaces ou corps. Ils furent placés dans un espace, mais plus tardivement que l'on ne croit. Certains, de finis devinrent indéfinis, puis infinis. Même leur constitution intime a été bouleversée : la ligne des Éléments n'est pas un ensemble de points.

Le devenir a parfois empiété sur l'être des objets, en toutes branches. Outre la possibilité du mouvement, qui ouvre la voie aux agrandissements et aux déformations des figures, on a pu envisager que trois, élevé au carré, devînt neuf ; et, par passage à la limite, des polygones devenaient parfois des cercles.

Parmi les objets, les uns sont singuliers (l'ensemble vide, l'entier trois), les autres généraux (le sous-ensemble, l'entier). L'objet général, caractérisé par le fait de présenter différents cas

* Tout ceci est détaillé dans *Maîtriser les Mathématique*s. Le mot « affirmation » y est systématiquement employé, parce que plus familier aux bacheliers. Pour le rendre à sa fonction positive ainsi perdue (celle de contraire de négation ), il suffit de le remplacer partout par « assertion ».

particuliers, va parfois jusqu'à bénéficier d'un franc singulier grammatical. La géométrie fut plus particulièrement familière de la tournure « la somme des angles du triangle, etc. ». En venant remplacer « la somme des angles de tout triangle », elle substitue un propos relatif à un seul objet général (le triangle) à un propos universel relatif aux éléments d'une classe (tous les triangles). L'existence de l'objet général découle, bien sûr, de celle d'une classe d'objets plus particuliers qui ont quelque chose en commun, quelque propriété partagée à l'identique. Les mathématiques ne se singularisent pas en cela, sinon par la netteté : pris sous un certain rapport, deux objets sont identiques ou bien ne le sont pas ; toute situation moyenne est bannie.

Les objets premiers sont les mal-aimés de notre science. De bien malingres porismes*, proposés comme honteusement et vite oubliés, initient les débutants aux nombres et au figures, puis aux fonctions et enfin aux ensembles. Les débutants semblent s'en accommoder grâce à une débrouillardise obligée. Mais sait-on vraiment ce que de mauvaises initiations induisent d'incompréhension, de mécompréhension, d'erreur, de dégoût et d'échec ? La richesse ontique des objets premiers n'est pas assumée honnêtement. On n'ose plus déclarer quelle part est prise de la réalité extérieure ou de la perception, quelle part est posée et décrétée.

La logique s'occupe de la correspondance entre le discours et les vérités relatives aux objets. La bonne formulation des déductions l'occupe beaucoup, mais pas exclusivement. Elle-même peut évoluer ; déjà a-t-elle su s'accommoder de l'infini actuel, au prix d'un vif débat. Il existe une logique qui, depuis Aristote, traite du général et du particulier pour des objets dépourvus de tout devenir. Quoi qu'elle en dise, elle a tendance à se prendre pour la seule forme possible de logique, comme si aucune de ses parentes ne pouvait être en charge de quelque devenir : si A devient B et si B devient C, alors A devient C ; et comme si une autre ne pouvait l'être du temps : ce qui est toujours vrai est parfois vrai.

La vraie logique doit-elle se moquer de la logique ? Sans aller jusque là, constatons que les mathématiciens, de tout temps, l'ont peu étudiée, certains même pas du tout. Ils leur est arrivé d'afficher le mépris que l'on sait à l'époque où elle ne prenait pas en compte les prédicats à plus d'une place. Comment donc faisaient-ils pour bien raisonner ? Comment font tous ceux qui, sans jamais avoir étudié la logique moderne, raisonnent d'une manière jugée satisfaisante ? On peut chercher des réponses, certes, du côté d'une logique commune implicite, comme innée ; commune, c'est-à-dire en place dans la pensée extérieure aux mathématiques, celle dite de tous les jours. Comment refuser de voir, malgré tout, que des choix ont été effectués aux origines même de la logique théorique ? Lorsqu'on affirme que le contraire** de « tous les entiers sont pairs » est « il y a des entiers impairs », et non pas « tous les entiers sont impairs », on ne s'appuie sur aucune logique innée.

Les objets mathématiques ont-ils été constitués de manière à se conformer à la logique, ou bien l'inverse ? Les deux, objets et logique, ne s'ajustent-ils pas plutôt les uns aux autres, à l'occasion de changements de cap et de réformes ? La notion de ligne droite s'est construite en rapport avec le regard ; c'est pourquoi, en retour, elle informe la vision. Et l'on a préféré bannir le devenir, notamment en lui donnant la forme figée de la fonction après avoir raisonné sur des grandeurs conçues comme variables.

Déploiement du discours et constitution des objets par des acteurs, vérités et actes, temporalité et autres rapports des objets à des réalités extérieures, concept d'infini, rapports du général au particulier, voilà divers constituants de l'univers qu'un mathématicien règle et fixe pour penser, ou que, le plus souvent d'ailleurs, d'autres ont fixé par avance. Libre à lui, pourtant, de le modifier en fonction

* Euclide avait écrit des *Porismes*, depuis perdus. Comme leur nom l'indique, il s'agissait du chemin à suivre pour arriver à la juste appréhension des bases ; d'une une initiation, à proprement parler, aux notions premières et aux principes qui les régissent.

** Si contraire ne plaît pas, malgré le masculin, il peut céder la place à un terme estimé préférable.

de ses besoins et de ses désirs. À quoi bon déclarer que la liberté est l'essence des mathématiques si l'on s'empresse de l'étouffer ?

Le mathématicien moderne peut être tenté de voir en toutes ces variations les moments d'une évolution maintenant achevée : les mathématiques se cherchaient et, enfin, se sont trouvées. Mais au nom de quoi les juger parfaites ? La réduction aux ensembles, qui satisfait un goût pour l'unité, ne rend pas plus vrai ce qui se démontre du nombre. La théorie des ensembles a dû elle-même prendre une tournure axiomatique et, finalement, se formaliser ; et l'ensemble, en tant qu'objet, y a perdu à son tour de la substance, après en avoir dépouillé le nombre. La vérité serait dans le formalisme ? Belle vérité que celle que, telle une idole sacrée, on vénère d'autant plus qu'elle se montre moins !

Considérons le cas simple de l'univers mathématique au Collège. Il pourrait être précisé par programme, tout comme le sont les notions à acquérir. L'idéalité de ces dernières pourrait être proclamée, sur le mode : *on admet qu'il existe des choses qui... que... quoi...* ; *on fait comme si elles existaient*. Les postulats peuvent être choisis riches, afin d'avancer vite. Les actes idéaux, du genre des constructions à la règle et au compas, pourraient être répertoriés. Rien n'empêche de doter les figures d'une mobilité, quitte à ce que la doctrine change au Lycée ; un tel changement, bien effectué, serait moins pernicieux que l'absence de doctrine explicite. Il y a des manières de s'exprimer qui doivent être clairement imposées : un nombre quelconque n'est pas un nombre choisi arbitrairement, ni même un nombre particulier peu familier ; un objet est égal à lui-même et à nul autre. Une liste de telles exigences peut être dressée et les abus de langage doivent alors être commis en toute connaissance de cause. Quelques loi de logique pratique pourraient être enseignées, dans un style grammatical, à grand renfort de paradigmes : *le contraire de* « *tous les entiers sont pairs* » *est* « *certains entiers ne sont pas pairs* ».

En tout, enfin, il serait bon de mettre en rapport d'une manière nette ce qui relève des mathématiques en elles-mêmes et ce qui touche à leur utilisation, à leur contact avec ce qui leur est extérieur. Lorsque l'on vérifie qu'une règle est bien droite, au nom de quoi dit-on qu'elle l'est ou qu'elle ne l'est pas ?

*