

POUR ABORDER LA *LOGIQUE MATHÉMATIQUE* DE STEPHEN KLEENE

Avec sa *Logique mathématique*, Stephen Kleene a laissé un traité de logique très précieux par son ampleur et sa richesse *. Bien que l'auteur n'ait pas ménagé ses efforts pour développer sa pensée, la lecture bute assez tôt sur des difficultés de quelque importance. À parcourir le texte en tous sens, on arrive à les circonscrire. La présente note est avant tout un guide destiné à faire gagner du temps dans ce travail.

En premier est dressé un tableau du langage-objet qui est progressivement construit dans les trois premiers chapitres. Il ne s'agit pas d'une introduction complète au contenu du livre. Sa fonction est d'évoquer de façon synoptique des notions de bases dispersées dans cent cinquante pages, en cherchant à délimiter aussi nettement que possible le langage-objet.

Ensuite sont analysées deux obscurités notables. L'une apparaît lors de la distinction faite entre deux emplois des variables : certaines devraient rester constantes ; or ce n'est pas ce qui s'observe. L'autre obscurité consiste en une sorte de volatilisisation des formes propositionnelles.

Précisons au préalable les options prises pour la rédaction de cette note.

- Le vocabulaire et l'usage des symboles se veulent fidèles, pour l'essentiel, à ceux de *Logique mathématique*.

- Les guillemets bas (« ») délimitent les citations, fussent-elle d'un seul mot.

À l'intérieur des citations ne figurent que des guillemets hauts et doubles (“ ”), tels qu'on les trouve dans l'ouvrage.

À l'extérieur des citations, les guillemets hauts et double (“ ”) sont de simples isolateurs. Les guillemets hauts et simples (' '), en revanche, invitent à considérer de manière formelle ce qu'ils encadrent, c'est-à-dire à y voir le symbole et non la chose symbolisée : si x est un nombre indéterminé, ' x ' est la lettre utilisée pour le désigner ; et '1' n'est pas le nombre 1 mais un chiffre servant à le symboliser.

- Le langage de l'observateur est appelé le métalangage.

- Sont mis en gras les symboles faisant partie du langage-objet, y compris dans les citations. En cas d'autonymie, on revient au maigre pour l'usage du symbole en tant que métonymie : pour désigner le connecteur “ \supset ” dans le métalangage, on emploie “ \supset ” (p. 14 et n. 145, p. 210).

- Lorsqu'une forme propositionnelle ne se réduit pas à une proposition, on choisit de dire, pour faire bref, qu'il s'agit d'une *propositionnelle*.

* Le texte de référence est la traduction de Jean Largeault publiée par la Librairie Armand Colin en 1971 (collection U, série Épistémologie).

A. Tableau des notions de base

Généralités

• Depuis un demi-siècle à peine, l'enseignement des mathématiques distingue soigneusement la fonction f de l'image $f(x)$ associée par f à un élément x quelconque de l'ensemble de départ. Auparavant l'appellation de fonction était appliquée à $f(x)$. Kleene pratique l'ancien style (voir les notes 50 p. 81 et 51 p. 82). Une conséquence est qu'il emploie « fonction propositionnelle » et non pas « forme propositionnelle ».

• L'usage des guillemets dans *Logique mathématique* (“ ”) n'est pas régi par des règles.
• Pour Kleene, le langage informel, qu'il soit commun ou scientifique, comporte des « énoncés ». Certains expriment des « propositions », d'autres des « fonctions propositionnelles ». Une proposition ni une fonction propositionnelle ne sont l'énoncé lui-même à proprement parler, mais plutôt son contenu de pensée, son « sens » (p.12). Les fonctions propositionnelles sont renommées « prédicats » (p. 81). Il y figure des « variables », que ce soit un “ x ” ou un mot qui joue un rôle équivalent. Lorsque chacune d'entre elles est remplacée par un terme particulier, ou plutôt par un objet particulier, pris dans un certain domaine, on obtient une proposition (p. 83 en bas).

Un langage-objet est une langue symbolique et formelle. Avec les « symboles » on compose des « formules ». Ces dernières servent à « exprimer » des notions, des propositions, des prédicats, des déductions, des démonstrations d'un discours donné. À l'inverse, un langage-objet est susceptible de plusieurs « interprétations ».

• En principe, les « entités linguistiques (formules et variables) » sont en caractères romains et les « entités mathématiques ou empiriques (prédicats, ensembles, éléments d'un domaine D) » se présentent en italiques (début de la note 90, p. 143).

• L'auteur commet quelques abus de langage par rapport aux règles qu'il édicte, et il s'en explique à plusieurs reprises (pour un exemple, voir la fin de la note 90 ; voir aussi la note 293, p. 399). On remarquera en particulier que, d'après la règle énoncée au début la note 90, les nombres devraient être écrits avec des chiffres en italiques (voir p.215 au milieu et n. 149).

• Les métaphores physico-chimiques ne sont pas à prendre trop au sérieux (p. 155, n. 104).

Calcul des propositions

• **P** et **Q** sont des « atomes ». Ces symboles servent à exprimer des propositions élémentaires distinctes, ici quelconques (p. 12 en bas).

• Les cinq « connecteurs propositionnels » usuels sont les symboles \neg (négation), $\&$ (conjonction), \vee (disjonction), \supset (implication) et \sim (équivalence). Ils expriment les opérations indiquées entre parenthèses et définies par leur table de vérité (p. 13).

• **A** et **B** sont des « molécules », c'est-à-dire des formules quelconques, composées d'atomes (ainsi que de connecteurs et de parenthèses), ou réduites à un atome : **A** peut être **P**, ou être **P & Q** ou encore **P \vee Q** (p. 14).

Une lettre comme '**A**' sert ainsi de variable pour les formules ; elle appartient donc au métalangage (p. 14, n. 6).

• **t** et **f** (pour le vrai et le faux) sont les deux valeurs de vérité (p. 15).

Calcul des prédicats

• Les « variables » d'individu sont **a, b... x, y ...** (p. 85).

• Il n'est pas introduit de constantes d'individu.

• Les « quantificateurs » sont \forall et \exists (p. 81). $\forall x$ est un « quanteur » (p. 86 en bas).

• **P**, **P(-)**, **P(-, -)** sont chacun un « ion », alias « expression atomique de prédicat », respectivement à zéro, une et deux places. **P(x, y)** n'est autre que **P(-, -)**, écrit « avec des variables en forme nominale » ; les variables ont alors pour seul rôle celui de « marque-place » (p. 84 en bas et p. 85).

À noter qu'en cette occasion la virgule “ , ” est introduite subrepticement dans le langage-objet, sans doute victime de sa concurrente du métalangage “ , ” (voir p.210 en haut). La première, pour être installée dans toute sa dignité, doit attendre la théorie formelle des groupes (p.229 en haut).

- Les « atomes » s'obtiennent en remplaçant les variables précédentes, qui sont toutes distinctes, par n'importe quelles variables. Sont des atomes : \mathbf{P} , $\mathbf{P(x)}$, $\mathbf{P(y, x)}$, $\mathbf{P(x, x)}$ (p.86).
- A , $A(x)$, $A(x, y)$ sont des « molécules », c'est-à-dire des « formules », simples atomes ou bien composées (d'atomes, de variables, de quantificateurs, de connecteurs, de parenthèses, de virgules) (pp.86 et 87 ; pour le sens exact à donner à ' $A(x)$ ', voir p.102 en bas.)

Bien que ce ne soit pas précisé, il faut comprendre que, comme en calcul propositionnel, les symboles ' A ', ' $A(x)$ ' ne sont pas dans le langage-objet. L'écriture ' $A(x)$ ' mériterait d'être envisagée. La note 90 (p.143) montre quel traitement reçoit ce genre de subtilité.

- Un prédicat à n variables est exprimé par une formule présentant n variables libres (avec $n \geq 0$). Pour $n = 0$, le prédicat est une proposition (p.89). Un ion à zéro place, en particulier, exprime une proposition (p.85).
- Dans une interprétation, on fait en sorte que chaque variable décrive le domaine D des individus, supposé unique pour simplifier (p.91 en bas). Une « assignation » fait correspondre à un atome comme $\mathbf{P(x)}$ une fonction logique $\mathbf{I(x)}$; et à \mathbf{x} , elle fait correspondre un élément de D . Le prédicat exprimé par $\mathbf{P(x)}$ devient alors une proposition (p.92).

$\mathbf{I(x)}$ associe à chaque élément de D un élément de $\{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ (p.92). La présence de $\mathbf{I(x)}$ dans le langage-objet résulte d'un choix expliqué dans la note 64 (p.92).

Prédicats avec égalité

- Dans le calcul des prédicats avec égalité, le langage-objet est enrichi de symboles destinés à désigner les « fonctions ». Un « méson » $\mathbf{f(-)}$, ou $\mathbf{f(x)}$, nomme une fonction à une variable (p.155).
- Les « termes » sont les variables ainsi que les formules $\mathbf{f(x, y)}$, $\mathbf{f(g(x))}$, etc.
- Un méson à zéro place, noté \mathbf{f} , s'interprète par un élément de D (p.156 en haut). Il est fait en sorte que ces mésons tiennent ainsi le rôle de constantes (p.157 en bas). Jane (p.82 en bas), Socrate (p.143 en haut) et le nombre cinq (p.144) partagent le privilège d'en bénéficier par anticipation.

Formalisation de l'arithmétique

- L'arithmétique des entiers naturels est formalisée par un système \mathbf{N} . Celui-ci est obtenu en enrichissant d'abord le calcul des prédicats du premier ordre avec égalité ; en particulier du terme $\mathbf{0}$ et des symboles ' $'$, $+$, \cdot (p.211).

Les variables d'individu sont \mathbf{a} , \mathbf{b} tandis que x , y deviennent des métavariabes (p.210).

- Les axiomes non-logiques expriment les axiomes de Péano. Pour le principe de récurrence, il est donné un schéma d'axiomes comportant $A(0)$, $A(x)$ et $A(x')$ (p.215, en haut). Ainsi le caractère quelconque de la propriété en jeu ne relève-t-il pas du langage-objet (voir p.92 en haut).

Emendanda

Quatre coquilles :

- p.86, l.19 : « $n > 1$ » → “ $n > 0$ ”.
- p.116, Ex.9, étape 2 : « \subset » → “ \supset ”.
- p.198 : note « 33 » → note “ 133 ”.
- p.199, l.18 : « élément » → “ éléments ”.

Un lapsus calami :

- p.158, l.5, « variables » → “ mésons (à 0 place) ”.

B. Dédouplements

En voulant dispenser certaines formules d'un $\forall x$ initial, afin de rapprocher au mieux le langage-objet des habitudes des mathématiciens, Kleene s'est encombré d'une étrange conception des variables libres. Il est question d'une opposition entre deux emplois, l'un dans lequel elles « restent constantes » et l'autre dans lequel elles ont « la possibilité de varier », et ce dédoublement entraîne celui de plusieurs autres notions majeures.

Or cette opposition n'est guère aisée à concevoir avec netteté. L'examen des exemples accroît même l'embarras, la constance des variables libres y étant fort difficile à observer. Il y a moyen, toutefois, de se dépêtrer de cet embrouillamini et, si l'on y trouve son compte, de sauvegarder l'essentiel.

Deux emplois des variables

Kleene part du constat que, en mathématiques, l'emploi des variables libres se fait au *sens conditionnel* (I), ou bien au *sens général* (II). Au sens (I) les variables libres sont « maintenues constantes », comme dans l'équation (1) $x^2 - 2x - 3 = 0$ (p. 110, en bas), où x « représente le même nombre d'un bout à l'autre d'une déduction » (p. 111 en haut). Au sens (II) ce serait le contraire, comme dans l'identité (3) $x + y = y + x$ (p. 110 en bas), où « “ x ” et “ y ” sont “ autorisés à varier ” parce qu'il est possible de leur attribuer à chacun différentes valeurs⁷⁰. » (p. 111 en haut). Accessoirement il est signalé qu'une variable mathématique n'est maintenue constante que dans un « contexte », c'est-à-dire dans une partie de démonstration, cette variable pouvant varier par ailleurs (n. 70, p. 111).

Afin de produire dans le langage-objet l'analogie du « sens général » (II), on fait en sorte que chaque hypothèse A d'une déduction équivaille à sa clôture universelle (notée $\forall' A$, quel que soit le nombre des variables libres) : B est conséquence valide de A , x pouvant varier (notation : $A \models^x B$), si et seulement si $\forall x A \models B$ (p. 112 en bas).

La notion de « déductibilité » subit le même dédoublement (\vdash et \vdash^x) que celui de la conséquence valide. Pour obtenir en théorie de la démonstration l'équivalent de ce qui précède, deux règles de déduction sont ajoutées, la règle \forall et la règle \exists (p. 114 en bas). La variable libre x est prise au sens conditionnel (I) tant qu'on ne les applique pas (p. 115 en haut).

Une piètre constance

Prenons pour domaine l'ensemble Z des entiers relatifs. La condition $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1) ne définit pas un nombre mais deux, à savoir -1 et 3 (Kleene les indique et n'en rejette aucun). Considérons des exemples encore plus simples :

- Pour ne définir qu'un nombre, il suffit de prendre la condition $x = 0$ (1').
- Une infinité de nombres seraient concernés si la condition était $x < 0$ (1'').
- Tous les entiers le seraient par $x = x$ (3').

La variable n'est vraiment « maintenue constante » que dans le cas (1') ; elle est « autorisée à varier » dans tous les autres cas ; mais elle ne peut être prise universellement, c'est-à-dire avec la généralité maximale, que dans le dernier (3') : seul « $x = x$ » peut avoir le sens de « $\forall x, x = x$ ». Cette interprétation se trouve confirmée à l'occasion de la formalisation de l'arithmétique (p. 215 en bas).

Si l'on accepte la définition de (II), il n'est donc pas approprié d'opposer les cas où la variable est « maintenue constante » et celui où elle a la « possibilité de varier ». L'auteur, pour le moins, s'est mal exprimé.

Logiciens et mathématiciens

L'intention était clairement de pouvoir se dispenser, dans le langage-objet, du $\forall x$ en tête de formules du genre de $\forall x x = x$; et ce afin de pouvoir rester au plus près de ce que font couramment les mathématiciens, parce qu'on ne voit « pas de raison de prohiber cette pratique ici. » (p. 143 au milieu). Le sens de leur “ $x = x$ ” est effectivement que cette égalité est vraie pour toute valeur de x . Kleene a procédé en se complaisant dans l'illusion que, dans toutes les autres situations, les variables libres restent constantes. (La possibilité de se dispenser du quantificateur universel avait été débattue antérieurement ; voir, par exemple, Rudolph Carnap, *The Logical Syntax of Language*, § 6.)

Concernant l'égalité “ $x = x$ ” en mathématiques, il faut noter qu'il est légitime de la comprendre au sens de l'universalité dans la mesure où, explicitement ou pas, x a été défini préalablement comme un élément quelconque d'un certain ensemble (de Z par exemple). Ayant énoncé auparavant “soit x un entier quelconque”, le mathématicien n'a pas besoin de rappeler, au moment d'écrire l'égalité, que x est n'importe quel entier. Il est vrai que naguère la précision “quelconque” était souvent sous-entendue dans la définition de x , et qu'elle l'est parfois encore.

L'absence du “quel que soit x ” devant $x = x$ n'étant qu'apparente, le logicien n'a pas à la reproduire à tout prix dans la formalisation du discours mathématique. D'ailleurs ce sont désormais les mathématiciens qui ont tendance, sans doute par imitation, à mettre un $\forall x$ même lorsque la définition préalable de leur x rend cela superflu.

Si des logiciens jugeaient utile de reprendre malgré tout l'idée kleenienne, il suffirait de remanier la répartition des cas de la façon suivante. Choisissons définitivement de parler de “variables libres prises au sens universel” ; ce sera le sens (II^{bis}) et le seul exemple associé reste $x = x$ (3'). On se dispense, pour ce faire, d'ajouter la condition nécessaire mais nullement suffisante que les variables « peuvent varier ». Les variables libres seront prises “au sens conditionnel”, le sens (I^{bis}), dans tous les autres cas : $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1), $x = 0$ (1'), $x < 0$ (1'') ; on devrait même leur ajouter les cas où nulle valeur de x ne satisfait la condition : $x^2 < 0$ (1⁰). Dans ce sens (I^{bis}), il est exclu de parler, de manière générale, de variables “restant constantes”.

La prétendue constance

Reste un mystère : pourquoi tenir à l'idée d'une variable x restant constante sous prétexte qu'elle est soumise à une condition, alors que cette dernière peut être loin d'en déterminer complètement la valeur ? La suite, qui porte sur un autre problème, fournira des éléments de réponse.

C. Ambiguïtés

En partant d'un paradoxe mineur rencontré à l'occasion du calcul propositionnel, une enquête amène à conclure qu'une hésitation de Kleene sur la notion d'assignation, soigneusement entretenue, a pour effet de miner son calcul des prédicats.

Un paradoxe propositionnel

En calcul des propositions, l'antécédent et le conséquent d'une implication (matérielle) ne peuvent être que des propositions. Le chapitre 1 propose un seul exemple mathématique, placé tout à la fin de la série d'exercices 14.1 :

« (h) Si $x + 3 = \sqrt{3-x}$ (1), alors $x^2 + 6x + 9 = 3 - x$. [...] Donc [...] « $x + 3 = \sqrt{3-x}$ implique $x = -6$ ou $x = -1$. » (p. 74 en bas). L'exemple ultime porte sur la réciproque : « (i) [...] $x = -6$ implique $x + 3 = \sqrt{3-x}$ et $x = -1$ implique $x + 3 = \sqrt{3-x}$. » (p. 75 en haut).

On remarque que, dans (h), l'expression « les seules racines de l'équation » devrait laisser la place à « les seules racines possibles pour l'équation ». En outre, (h) et (i) ne s'apprécient adéquatement qu'en se rappelant un sens ancien de « racine carrée » : $\sqrt{9} = +3$ ou -3 . Mais l'intéressant est ailleurs.

Étant donné que l'égalité $x+3 = \sqrt{3-x}$ est vraie ou fausse selon la valeur donnée à x , on serait tenté de penser qu'il s'agit d'une propositionnelle (une forme propositionnelle qui n'est pas une proposition). Que fait-elle donc en antécédent dans ce chapitre ?

Pour établir que cette apparente confusion ne résulte pas d'une erreur involontaire de la part de l'auteur, mais d'un parti pris, examinons trois passages dans lesquels cette affaire est traitée.

La volatilisisation des propositionnelles

1. Lors de la présentation du calcul des prédicats, au chapitre 2, l'exemple « " $x < y$ " » sert à attirer l'attention sur une ambiguïté courante en mathématiques : cette écriture est une façon de « nommer un prédicat » (que l'on peut préférer au simple « $<$ ») ; d'autre part « " $x < y$ " » sert à « exprimer une proposition qui est la valeur de ce prédicat lorsque " x " et " y " sont censées désigner des objets ⁵³. » (p. 83 en bas). Or la note 53 dit que : « Si ces objets ne sont pas particularisés, la proposition peut être appelée « valeur ambiguë » du prédicat. » (p. 83).

En affirmant que l'objet peut ne pas être particularisé en mathématiques, la note laisse penser qu'il pourrait en aller de même en logique lors d'une assignation. Autrement dit, la variable x pourrait se voir associer, non seulement -6 ou -1 , mais tout aussi bien un nombre x entièrement indéterminé. Or cela n'est nullement dit lorsqu'est présentée en toute généralité la notion d'interprétation (p. 91 en haut), bien au contraire (p. 93 au milieu). Et cela n'apparaît même pas dans les exemples qui illustrent et étayent le propos principal des chapitres 2 à 4 : on croit y voir que seul un objet bien déterminé peut être associé à une variable formelle.

Efforçons-nous de comprendre, dans l'extrait de la page 83, que $x < y$ doit être vu comme une proposition dans la mesure où x et y sont « censés » être des objets, dans la mesure où l'on fait comme s'ils étaient « particularisés ». La particularisation a bien lieu mais, si l'on ose dire, à l'état virtuel. Le prédicat devient une proposition, mais virtuellement seulement. Kleene déplace l'accent, en quelque sorte, dans cette conclusion : même si ce n'est que virtuellement, on a bien une proposition.

Avouer une ambiguïté dans cette affaire est la marque d'une louable honnêteté. Il semblerait que l'expression « valeur ambiguë », malheureusement, ne réapparaisse pas dans la suite.

2. La présentation du calcul des prédicats avec égalité se fait au chapitre 3. Il y est expliqué, à propos des « termes », que les « fonctions » à zéro variable « sont des individus » ¹⁰⁵. » (p.156 en haut). Or la note 105 commence par dire que : « Lorsque les variables sont interprétées comme exprimant les éléments de D , les formules expriment des propositions ⁵³, et les termes des éléments de D . » (p. 156).

La note 105 assure donc le lecteur qu'il n'a pas eu la berlue au chapitre 2, et le nouveau renvoi à la note 53 indique que la fameuse ambiguïté ne fait nullement l'objet d'un reniement.

3. Dans la formalisation de l'arithmétique par la constitution d'un système \mathbf{N} , au chapitre 4, il apparaît que « Tous les termes de \mathbf{N} sont des noms de nombres naturels, particularisés ou non, de même que toutes les formules expriment des propositions ^{53 105}. » (p.215 au milieu).

Si l'on espérait que, dans cette phrase, « formule » fût à prendre pour un synonyme de « formule close », on serait désabusé par quelques exemples proches. Parmi eux : « nous obtenons une autre formule $\forall \mathbf{b}((\mathbf{a}) = (\mathbf{b}))$ » (p.211 au milieu). Le double appel de note est un rappel des plus insistants. Le jugement d'ambiguïté est amplement confirmé.

Rapprochements avec le dédoublement

À deux reprises le thème de l'emploi en deux sens des variables libres et celui de l'interprétation de toute formule par une proposition se conjoignent de façon fugace.

4. Cela se produit une première fois à la fin de la note 105. Lisons-la intégralement : « Lorsque les variables sont interprétées comme exprimant les éléments de D , les formules expriment des propositions ⁵³, et les termes des éléments de D . Cependant nous n'avons ici rien d'analogue, pour les termes, au sens de la généralité de variables libres x_1, \dots, x_q dans les formules, par l'effet duquel une formule A pouvait exprimer la même proposition que $\forall x A$ (§ 20). » (p. 156).

On savait déjà que, lorsque x et y sont “ censés ” désigner des éléments de D , une formule telle que “ $f(x) = y$ ” s'interprète par une proposition. La seconde phrase semble ajouter que cette formule ne peut pas être tenue pour une abréviation légitime de “ $\forall x \forall y f(x) = y$ ”. Cet ajout, il est vrai, ne produit rien de plus ici qu'une contiguïté des deux thèmes.

5. Lors de la présentation du calcul des prédicats, en § 16, on trouve une discrète anticipation, pleine de sens après coup : « Mais comme on l'a remarqué ci-dessus en discutant de la notation des prédicats, en interprétant les variables comme des signes mis pour des objets particuliers, on fait exprimer aux formules non pas des prédicats mais les propositions qu'ils prennent pour valeurs. (Il y a d'autres moyens d'interpréter une formule à variables libres comme exprimant une proposition, on le verra aux §§ 20, 38.) » (p. 89 en bas).

La première phrase ne fait que résumer la doctrine classique de l'interprétation. La seconde fait allusion à la section 20, dans laquelle est exposé le dédoublement des variables, et à la section 38, consacrée à la formalisation de l'arithmétique. Cette dernière référence s'explique par le fait que dans les huit axiomes non-logiques de \mathbf{N} (le schéma d'axiomes de la récurrence ayant été mis à part), les variables sont prises au sens de la généralité (p. 215 en bas). Ceci, d'ailleurs, se rencontre également dans la formalisation de la théorie des groupes (§ 39).

Les « autres moyens d'interpréter une formule à variables libres comme exprimant une proposition » que fait miroiter la phrase entre parenthèses sont donc à chercher dans l'usage des variables au sens de la « généralité » (II). Si elles sont employées au sens « conditionnel » (I), les variables libres sont “ maintenues constantes ”, ce qui a pour conséquence de transformer d'office les propositionnelles en propositions. Au sens (II) une variable x “ peut varier ” ; la clôture, en la liant, produit une proposition. Ainsi x est-elle à la fois libre dans “ $x = x$ ” et liée dans “ $\forall x x = x$ ”, formule équivalente en un certain sens à la précédente. La propositionnelle “ $x = x$ ”, dans le fond, est une proposition, à savoir “ quel que soit x , il est égal à lui-même ”.

Que les variables “ restent constantes ” ou qu'elles “ puissent varier ” ; ou plutôt : qu'elles soient prises au sens conditionnel (I^{bis}) ou au sens universel (II^{bis}), une formule s'interprète toujours par une proposition. La nuance réside en ce que, prise au sens (II^{bis}), une variable “ libre ” n'a même pas besoin d'assignation.

Essai d'explication

Dans la conception qui vient d'être dégagée, les propositionnelles, d'une certaine manière, ne trouvent plus leur place. Il n'y a plus lieu d'être surpris de ce que l'énoncé “ $x + 3 = \sqrt{3 - x}$ ” soit considéré comme une proposition dès le chapitre 1. Mais si la rencontre du paradoxe des exemples (h) et (i) de la p. 74 s'en trouve expliquée, le paradoxe lui-même n'en est que renforcé : comment comprendre cette volatilisisation des propositionnelles ? Tentons une reconstitution.

Soit un discours mathématique dans lequel un nombre indéterminé x “ parcourt ” Z . Une variable formelle x servira, tout naturellement, à exprimer x dans le langage-objet. Mais comment exprimer le nombre 1 dans un langage-objet privé de constantes d'individu (et dans lequel il n'y a pas

nécessairement des “ termes ”) ? Cela ne se peut faire que par appel à x . Cette variable prenant en charge les deux expressions, les deux traductions, il devient difficile d'échapper à l'ambiguïté et, pis, à l'équivocité. La situation empire encore lorsque l'on renverse le point de vue pour abandonner l'expression au profit de l'interprétation : à x , une assignation devrait faire correspondre x et 1 à la fois. Il est tentant, dans ces conditions, de penser x comme égal à 1... tout en étant un x . Et voilà pourquoi notre variable est constante. Toutefois, comme on ne peut lui retirer entièrement d'être x , c'est-à-dire une indéterminée (une variable, comme on disait autrefois), son statut ne laisse pas d'être ambigu.

Jusqu'à un certain point, l'introduction de constantes d'individu, potentiellement \aleph_0 quant à leur nombre, permettrait d'envisager plus de cohérence. Le symbole $\mathbf{1}$ nommant 1 dans le langage-objet, sa substitution à x exprimerait l'idée que x prend la valeur 1. L'assignation classique qui à x fait correspondre 1 se présenterait comme une composée dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} x & \rightarrow & x \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \mathbf{1} & \rightarrow & 1 \end{array}$$

La difficulté fait retour dès que x décrit un ensemble de cardinal 2^{\aleph_0} et, a fortiori, un ensemble quelconque. Comme les autres symboles, les constantes doivent pouvoir être écrites, quel qu'en soit le coût, temporel, matériel ou autre. On peut imaginer que Kleene ait préféré sacrifier les propositionnelles à la puissance du continu. Le sacrifice n'est d'ailleurs pas entier puisque les prédicats, et les propositionnelles en particuliers, existent. Il ne s'agit que d'un escamotage, effectué non sans regret. La note 53, en accordant aux propositionnelles une « valeur ambiguë » dans l'interprétation, exprime ce regret dans le langage des bas de page.

*