Georges BARTHÉLEMY

L'IMPLICATION EN LOGIQUE ET EN MATHÉMATIQUES

L'implication pose un problème bien connu que l'on formule traditionnellement (et malencontreusement pour ce qui est des épithètes) en termes d'implication matérielle et d'implication formelle. La première est, en principe, l'opération qui à deux propositions A et B associe la proposition $A \rightarrow B$ et qui est définie par une table de vérité à quatre lignes. Les logiciens préfèrent désormais l'appeler le *conditionnel*. Par extension, le mot désigne aussi l'énoncé $A \rightarrow B$ lui-même. La seconde forme peut donc hériter du nom d'implication, et le symbole $\Rightarrow$ lui sera réservé ici. En mathématiques « $A \Rightarrow B$ » est employé comme abréviation de « si A, alors B » [1].

La logique formelle, dite aussi logique mathématique, celle qui est constituée en science, connaît bien le conditionnel, qu'elle a placé dans le calcul des propositions et dans le calcul des prédicats. Elle est moins à l'aise avec cette *implication*, qui ne trouve pas à se loger dans les langages-objet les plus courants. Une différence bien connue des spécialistes, entre le conditionnel et l'implication, est qu'une proposition de la forme $A \rightarrow B$ peut être vraie sans qu'il y ait aucun rapport de sens entre A et B, et même pis : lorsque A est fausse. Pour la logique formelle, $1 + 1 = 1 \rightarrow 1 + 1 = 2$ est une proposition vraie, ce qui ne va pas sans jeter un certain trouble lorsque le symbole $\rightarrow$ est lu « implique ». On a beau nous ressasser qu'il faut s'y faire parce que c'est logique, ça ne passe pas. Cette différence en occulte une autre, toutefois, de plus de conséquence, et qui éclaire cette première difficulté.[2]

Dans l'enseignement des mathématiques on confond $\rightarrow$ et $\Rightarrow$. Lorsque l'on fournit aux élèves ou aux étudiants des éléments de logique en vu de favoriser leur aptitude à bien raisonner, on définit l'implication par la table du conditionnel et l'on prétend, sans vergogne aucune, que cela correspond à la tournure « si..., alors... » ; autrement dit, on identifie allègrement l'implication et le conditionnel. De ce fait, une implication $A \Rightarrow B$ est réputée porter sur des propositions A et B, c'est-à-dire sur des énoncés dont chacun est soit vrai, soit faux. Or en mathématiques, dans « si A, alors B », A et B sont rarement des propositions. Commencer une phrase par « si $1 + 1 = 2$ » serait perçu comme pire qu'une faute : comme une ineptie ; ça n'aurait pas de sens et tout le discours s'en trouverait disloqué. La conjonction « si », marque de la supposition, doit être suivie d'un énoncé dont il ne soit pas possible de dire *préalablement* s'il est vrai ou s'il est faux. Un mathématicien ne dit, ni n'écrit jamais « si $1 + 1 = 2$ » parce qu'il sait que, 1 + 1 égalant 2, cette égalité n'a pas à être supposée (en arithmétique classique, bien entendu). En revanche il est normal d'écrire « si $m = 2$ » après avoir présenté m comme étant un réel quelconque ; l'énoncé « $m = 2$ », en soi, n'est ni vrai ni faux, du fait de l'indétermination initiale de m. Énoncer « si $m = 2$ » a pour effet immédiat que m devient effectivement égal à 2, et ce jusqu'à un certain point du discours ; par exemple jusqu'au moment où l'on énonce « si $m \neq 2$ », ou encore « si $m = 3$ ».

---

1. Semblablement on distingue le biconditionnel $A \leftrightarrow B$, qui est défini par une table ou par $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$, de l'équivalence, dite logique, $A \Leftrightarrow B$, laquelle peut être vue comme conjonction de l'implication $A \Rightarrow B$ et de sa réciproque.
2. Ce qui suit a grandement profité d'un débat mené, un an durant, avec Jean-Pierre BELNA, et dont j'espère qu'il n'aura pas de fin.

La différence avec les exemples d'implication précédents tient à ce que ceux-ci portaient sur des propositions ($1 + 1 = 2$), alors que les derniers portent sur des *propositionnelles* ($m = 2$). Ne nous privons pas d'appeler ainsi les formes propositionnelles qui ne sont pas des propositions. Certains préféreraient peut-être parler de prédicat à une place à propos de $m = 2$; évitons d'entrer dans ces débats terminologiques.[3] Dans les démonstrations mathématiques, on rencontre ainsi, explicitement ou pas, moult implications faisant intervenir des propositionnelles ; « $m = 2 \;\Rightarrow\; m^2 = 4$ » en est un exemple tout à fait élémentaire. Le rapport entre ce type d'implication et la table de vérité du conditionnel est loin d'aller de soi, puisque que cette dernière concerne des propositions.

Il serait toutefois erroné d'affirmer que l'implication porte toujours sur des propositionnelles et jamais sur des propositions. Une situation où cela se produit est la démonstration par l'absurde. Pour établir par cette voie la vérité d'une proposition P, on la suppose fausse et l'on déduit de là une absurdité, c'est-à-dire que l'on établit sur cette base quelque proposition C en contradiction avec un énoncé déjà établi (axiome ou théorème) ou avec une hypothèse. On est donc amené à démontrer que si (non P) était vraie, alors C le serait aussi. L'implication (non P) $\Rightarrow$ C est ainsi la colonne vertébrale de la démonstration. Dans le contexte envisagé, elle a pour antécédent et pour conséquent des propositions, (non P) et C. Ce qui rend cela possible, contrairement à ce qu'il en était précédemment, c'est qu'au départ de la démonstration la proposition P qu'il s'agit de démontrer est incertaine pour celui à qui s'adresse la démonstration, le lecteur ou l'auditeur que l'on entend convaincre ; et que cette incertitude se transmet évidemment à (non P). « Si (non P) » n'a rien d'inepte dans ce contexte de démonstration par l'absurde.

Hors des démonstrations, c'est-à-dire dans les raisonnements que l'on tient dans le cours d'une recherche, sans parler des scholies, tout peut arriver parce que tout y est permis (ou presque).

En résumé : le conditionnel $A \rightarrow B$ a la liberté d'être vrai alors que A est faux ; présenté à travers les tables de vérité, il porte sur des propositions ; cela ne concerne les mathématiques que de façon secondaire. L'implication, dont leurs démonstrations directes font grand usage, ne relève pas du calcul des propositions, du moins pas de façon immédiate.

Derrière le problème du conditionnel se cache celui de la disjonction. On peut faire relever le premier du second puisque $A \rightarrow B$ équivaut à $\neg A \vee B$. Les constats sont les mêmes : un théorème, ni une démonstration à moins qu'elle ne se fasse par l'absurde, n'a de raison de contenir un énoncé (A ou B) dans lequel A et B seraient des propositions, dans la mesure où l'on sait, à l'étape où s'énonce (A ou B), si les propositions A et B sont vraies ou fausses. Au cas où elles ne seraient pas toutes les deux vraies, le mathématicien (celui qui a entrepris de convaincre) ne ferait pas appel à la proposition (A ou B) mais à celle de ces deux qui serait vraie.

La conclusion à retirer de tout cela est que le calcul des propositions est partiellement inapproprié dans l'enseignement des mathématiques informelles. La raison de fond est que la disjonction, et l'implication avec elle, n'y sont utiles que dans un moment où une incertitude oblige à envisager différentes possibilités. La logique pratique, celle qui commande à la pratique effective des mathématiques, ne peut pas faire l'économie de la notion de certitude relative à un moment de l'exposé, pas plus qu'elle ne peut faire l'économie de l'idée de vérité qui donne son fondement à celle de certitude. Les mathématiques informelles sont une science ; ses énoncés sont vrais lorsqu'ils sont en adéquation avec la réalité constituée de ses objets et de leurs propriétés. Qui acquiert cette science doit passer, à l'égard de ces dernières, de l'incertitude à la certitude en suivant leur démonstration.

3. Dans *Maîtriser les Mathématiques*, les énoncés bien formés, les propositions et les propositionnelles ont été appelés respectivement propos, affirmations et pseudo-affirmations. L'ouvrage devant pouvoir être lu par des étudiants qui ignorent tout de la logique mathématique, le vocabulaire a été choisi de façon à leur épargner une initiation rigoureuse à celle-ci et, néanmoins, à être parlant pour des bacheliers.