Georges BARTHÉLEMY

OBSERVATIONS SUR LES BASES DES PROBABILITÉS

Le formalisme kolmogorovien est appréciable pour son apport de netteté et de simplicité, au point qu'il se trouve des mathématiciens pour affirmer que, de ce fait, tout va pour le mieux dans le monde des probabilités. D'autres, bien que rétifs à pareille béatitude, posent le problème central en termes d'interprétation : on lit souvent que le concept de probabilité est bien accepté, mais que diverses écoles se chamaillent sur son *interprétation*. Le concept qu'ils évoquent ainsi n'est autre que le formalisme sus évoqué, ainsi érigé en texte sacré autour duquel devrait tourner toute réflexion, principalement en ce qui touche à l'application à la réalité.

On peut aussi chercher à se positionner dans ces débats en tournant le dos à cette idolâtrie du formalisme et en s'aidant d'un peu de recul historique. Un des plus notables débats, comme on sait, porte sur la question de savoir si les probabilités se doivent d'être « objectives » ou « subjectives ». Remontons toutefois en deçà.

1. Deux nouveautés pour le sens de « probabilité »

Le sens premier du mot a été quelque peu négligé, sinon occulté, durant deux siècles par certains usages mathématiques. Comme il fait retour sous la pression de diverses catégories d'utilisateurs, commençons par le dégager.

a. La probabilité d'une opinion

L'origine du mot évoque-t-elle la preuve, comme il est souvent allégué ? En latin *probare* ne signifie pas seulement prouver, mais aussi et surtout éprouver, approuver, faire approuver, faire accepter. Est *probabile* ce qui est vraisemblable ; la *probabilitas*, c'est avant tout la *vraisemblance*.

Les héritiers de la latinité maintinrent ce sens ; ainsi de *probable* et *probabilité* en la troisième partie du *Discours de la Méthode*, où ces notions se trouvent appliquées, non pas à des événements, mais à des opinions : « (...) et même qu'encore que nous ne remarquions point davantage de probabilité aux unes qu'aux autres, nous devons néanmoins nous déterminer à quelques unes, et les considérer après, non plus comme douteuses en tant qu'elles se rapportent à la pratique, mais comme très vraies et très certaines, à cause que la raison qui nous y a fait déterminer se trouve telle. »

Cette notion de probabilité est toujours vivante et il est... probable qu'elle ne périclitera jamais. Le fond de cette idée étant la vraisemblance, son arrière-fond est la vérité. Faute d'une certitude entière sur les choses futures, présentes ou passées, on cherche ce qui semble vrai, et même ce qui le paraît le plus.

Comme tout autre adjectif qualificatif, *probable* est susceptible de quantité : *plus probable*. L'emploi d'un comparatif ne suffit cependant pas à parler de concept quantitatif ; il y faut du nombre.

b. Passage au concept quantitatif

Les idées numériques que nous associons en pratique au mot *probabilité* l'avaient été d'abord à d'autres : *sort*, *chance*, *hasard*. Le rapprochement du mot *probabilité* et des idées portées par ces derniers se fit au cours de la seconde moitié du XVII^e siècle.

Blaise Pascal, dans son hostilité à la *probabilité des opinions* des Jésuites, n'était évidemment pas enclin à appeler *calcul des probabilités* les additions de fractions que lui proposait Pierre de Fermat. Comme il n'était guère algébriste non plus, l'arithmétique qu'il développa avec lui fut parée de l'appellation de *géométrie du hasard*. Que ce soit dans les lettres de Pascal ou dans le *Traité du Triangle Arithmétique*, il est question de règles de décision plutôt que de probabilité. Si ce mot n'y apparaît pas, la chose elle-même y est assez discrète. En matière de chances, il est tout juste question d'une « égalité des hasards » qui signifie que les deux joueurs ont, à chaque coup, les mêmes chances de gagner ou de perdre. Fermat, pour sa part, envisage « 2/9 des hasards », à lire « deux sur neuf des hasards ».

Peu après la *Logique* de Port-Royal envisagea, en son chapitre ultime, des *degrés de probabilité* : « neuf degrés de probabilité de perdre un écu ». On y voit même le mot *probabilité* commencer de prendre à lui tout seul un sens quasi quantitatif : « il arrive de là que la probabilité de la perte surpasse plus la probabilité du gain, que l'avantage qu'on espere ne surpasse le désavantage auquel on s'expose ». Bien que cette « probabilité » ne soit pas définie, des rapports de probabilités sont ici envisagés, dans un balancement qui n'est pas sans rappeler les proportions euclidiennes [*]. Il est d'ailleurs question, à propos de la « probabilité qu'un bien arrive ou n'arrive pas », de « regarder géométriquement la proportion que toutes ces choses ont ensemble ». Pour l'adjectif *probable* la quantification est encore plus nette : « il sera peut-être trente mille fois plus probable », formulation qui, implicitement, fait de la probabilité un degré [**].

Un dédoublement de sens s'observe donc : ces mots furent pris du langage de la vraisemblance, où ils ont continué et continuent d'officier, pour venir en concurrencer d'autres, déjà en place sur un terrain plus quantitatif, comme *hasard* et *chance*. La concurrence avec ce dernier se rencontrera d'ailleurs jusque chez Cournot et Poisson, en passant par Bayes [***]. Malgré tout, le mot *probabilité* ne désignait pas encore, dans la *Logique*, un rapport de nombres entiers. Cet état de fait se maintint, avec Huygens et Monmort notamment ; chez Jacques Bernoulli le rapport du nombre de cas favorable au nombre des cas possibles est encore appelé chance ; il semblerait que Moivre ait été le premier à l'appeler probabilité.

c. La probabilité d'un événement

En même temps que le mot probabilité commençait à s'imposer à la place de hasard et de chance, l'idée qu'il exprime, dans cet emploi numérique, subit un déplacement. Il évoquait antérieurement, et continue d'ailleurs d'évoquer, l'incertitude dans laquelle on peut être à l'égard de tout ce qui a quelque apparence de vérité, de toute *opinion*. En tant que nombre la probabilité fut affectée principalement à un *événement* dont on ignore un aspect, qu'il soit à venir, ou qu'il soit passé mais en partie caché. Y avait-il nécessité à ce les opinions fussent ainsi négligées au profit des événements ?

---

* Cette démarche est à rapprocher de celle qu'avait pratiqué Galilée, dans les *Discours*, pour construire un concept de vitesse du mouvement uniforme, axiomatiquement il est vrai.

** Dans l'avant-dernier chapitre de la *Logique*, on en reste encore au comparatif, si renforcé soit-il : « de sorte qu'il est incomparablement plus probable, que ce contrat que je vois est l'un des neuf cent quatre-vingt-dix-neuf que non pas qu'il soit cet unique qui entre mille se peut trouver antidaté ».

*** Dans l'*Essay* de Bayes, la notion de probabilité est introduite de manière particulièrement opaque (Définition 5 : « La *probabilité d'un événement* est le rapport entre la valeur à laquelle une attente dépendant de la survenue de l'événement devrait être estimée, et la chance de la chose attendue sur sa survenue. »). Qui plus est, elle pâtit de circularité (Définition 6 : « Par *chance* j'entends la même chose que probabilité. »).

Parmi les événements à survenue aléatoire, la part belle fut tôt faite aux résultats des jeux de hasard. Ce n'est pas que l'importance du jeu, qui certes n'était pas mince, ait seule inspiré ces recherches. Par leur simplicité ils donnent appui à la réflexion et servent éventuellement de modèles pour d'autres affaires. Il était patent dès le départ que chances, hasards et degrés de probabilité se déterminent aisément dans les tirages, lancers et autres opérations simples, alors qu'il était envisagé de quantifier la vraisemblance en d'autres matières que les jeux, notamment pour ce qui est des « événements moraux et politiques » (Port-Royal), voire pour « les affaires civiles, morales et économiques » (Bernoulli). Les jeux de hasard tels que les lancers de dés, s'ils facilitent la réflexion, sont trop rigides pour constituer des modèles dans les affaires morales. Aussi les tirages prirent-ils la relève, y apportant toute la souplesse dont ils sont dotés.

2. La science numérique des probabilités d'événements

Le concept quantitatif de probabilité, en se déportant vers les événements où le nombre a facilement prise (jeux et tirages), se spécialisa au point de recevoir un statut scientifique. Attardons-nous maintenant sur ce que l'on met classiquement à la base du calcul, et sur quelques points délicats plus particulièrement.

a. Attribution d'une probabilité

Avant de calculer sur des probabilités, il faut en attribuer aux événements.

Les issues

Les événements à venir ont plus ou moins d'aptitude, de capacité à se produire, de possibilité de se réaliser. Par conséquence, du fait de ce que nous en savons, ou du moins de ce que nous pensons en savoir, il y a différents degrés de confiance, de croyance, en leur survenue. Les événements passés dont on ignore un aspect sont analogues aux événements futurs, en ce que leur connaissance complète est encore à venir.

Pour un événement en général, tout comme dans un tirage il doit y avoir épreuve (ou expérience) c'est-à-dire, pour l'essentiel, constat d'une nouveauté. Ce n'est pas de lancer le dé qui importe le plus, c'est d'observer quel numéro sort. L'épreuve doit être aléatoire, ce qui veut dire que le constat ne peut pas être prévu avec certitude (ou du moins qu'il puisse ne pas l'être).

Lors d'une épreuve aléatoire, un événement pouvant se réaliser a parfois plusieurs manières de le faire : lors du lancer d'un dé, l'apparition d'un nombre pair en a trois. En ce sens, cet événement est décomposable : c'est obtenir le 2, ou le 4, ou le 6. Obtenir le 2, en revanche, est un événement élémentaire ; il y en a six, appelés aussi bien (hors formalisme ensembliste) issues, éventualités ou cas possibles. Les issues sont les constats possibles, dans leur particularité. Leur détermination est parfois fort délicate, comme l'a tôt révélé le problème du Grand Duc de Toscane.

Obtenir *2 et 3* en lançant un dé deux fois de suite n'est pas élémentaire parce que c'est réalisable par *2 puis 3*, mais aussi par *3 puis 2*. En revanche *2 puis 3* est élémentaire. Dans le problème évoqué, ramené pour simplifier au cas de deux dés jetés ensemble, il n'y a qu'une façon pour un lancer d'amener *1 et 1*, mais il y en a deux pour ce qui est d'amener *1 et 2* pourvu que les deux dés soient distingués d'une manière ou d'une autre (situation assurée d'office lorsqu'on en lance un seul deux fois de suite).

Deux dés indiscernables étant lancés ensemble, au nom de quoi ne pourrait-on pas considérer comme élémentaire la survenue de *1 et 2* ? Les dés prétendus indiscernables le sont peut-être avant le lancer ; du moins le sont-ils quant à leurs apparences, alors qu'en réalité chacun a son identité ; chacun a d'ailleurs une position, différente de celle de l'autre du fait de l'impénétrabilité de leur matière ; disons par exemple que l'un est à gauche et l'autre à droite. Il est vrai que cette différence se perd par le passage dans un cornet, et même qu'il faut qu'elle se perde : on ne doit pas pouvoir dire à la sortie lequel était initialement à gauche. Malgré cela, une fois le lancer effectué, ils ne sont plus indiscernables : à l'arrêt, l'un est à gauche et l'autre à droite (ceci, à nouveau, pour dire que leurs positions sont nécessairement différentes). Si celui de gauche porte le 1 et celui de droite le 2, il faut considérer que l'obtention de *1 et 2* aurait pu se produire aussi bien avec le 1 sur le dé maintenant à droite et corrélativement avec le 2 sur celui de gauche. C'est en ce sens que, même dans un lancer simultané, *1 et 2* n'est pas élémentaire.

Le modèle équiprobable

Pour toute épreuve aléatoire n'offrant qu'un nombre fini de résultats possibles, le modèle de référence est celui du tirage aléatoire élémentaire symétrique (dit aussi équiprobable). Le tirage peut être qualifié d'élémentaire lorsqu'on ne tire qu'un objet (un jeton par exemple). La probabilité d'un événement est alors, par définition, le rapport du nombre des cas favorables à cet événement au nombre total des cas possibles dans cette épreuve.

La symétrie du tirage consiste en une même aptitude pour chacun des cas possibles à se produire, pour autant que nous sachions. Elle réside, plus exactement, dans l'absence de toute connaissance de différence entre ces issues, en ce qui concerne leur capacité à se produire, autrement dit quant aux conditions présidant à leur éventuelle survenue : les causes de survenue sont les mêmes, pour autant que nous sachions. Des marques différencient les deux faces d'une pièce ; en ce sens celle-ci n'est pas symétrique. Toutefois, tant que nous estimons que cette dissymétrie de constitution ne peut avoir d'influence sur l'apparition d'une face lors d'un lancer, les deux issues se présentent symétriquement.

Parler d'équiprobabilité pour les situations symétriques a été vu par certains, par Henri Poincaré notamment, comme un cercle logique : la définition de la probabilité comme rapport des nombres de cas présupposerait celle d'équiprobabilité, c'est-à-dire de probabilités égales, donc celle de probabilité. S'il en était vraiment ainsi, il n'y aurait plus du tout de probabilités. D'aucuns ont tenté de conjurer cette déplaisante perspective en déclarant que l'adoption du formalisme résolvait la difficulté ; il résout tant et si bien que le penseur, ainsi réfugié dans son donjon formel, s'en retrouve prisonnier, incapable d'aller au contact de la réalité. On échappe au cercle en considérant que la symétrie est une identité des causes d'apparition des différentes issues, pour autant que l'on puisse les connaître et les comparer. Ce n'est qu'après avoir défini la probabilité comme rapport des nombres de cas qu'il apparaît que chaque événement élémentaire a pour probabilité 1/N et donc qu'il y a équiprobabilité. Employer d'emblée le mot équiprobabilité n'est qu'une anticipation lexicale sur le moment où la probabilité aura été définie. Au stade initial il n'y a pas encore la moindre probabilité ; il y a, éventuellement, identité des conditions de survenue telles que nous les appréhendons.

En toute généralité, et en théorie, la méthode d'attribution d'une valeur numérique dans le cas d'un univers fini consiste à ramener l'expérience à un tirage symétrique. Pour réaliser l'équivalent du double lancer de dé, on pourrait placer trente-six jetons dans un sac, parmi lesquels un seul porterait la marque *1&1* et deux porteraient la marque *1&2* ; tirer un jeton serait alors une épreuve symétrique équivalente au lancer des deux dés.

Semblablement, si l'on a quelques raisons de penser qu'un dé est pipé, on peut envisager comme suit un tirage équiprobable qui soit l'équivalent de son lancer : on place dans l'urne des boules semblables portant chacune un des six premiers chiffres, en nombre tel que la probabilité de sortie de l'un des chiffre en tirant une boule soit égale à celle de son apparition lors d'un lancer, cette probabilité ayant été estimée par ailleurs, d'une façon ou d'une autre.

Au-delà du cas de l'univers fini, on rencontre aussi des univers infinis, et ce dans deux genres. L'un consiste à envisager une infinité de tirages successifs, ce qui est bien sûr plus facile à dire qu'à faire. L'autre consiste à entrer dans le domaine des probabilités continues, par exemple pour des problèmes mettant en jeu des figures géométriques. Ces extensions appellent des définitions et des théorèmes dans le prolongement de ceux rencontrés pour les univers finis si l'on veut qu'une axiomatique puisse unifier ces différentes théories.

b. L'usage des fréquences

Jacques Bernoulli, soucieux d'échapper aux contraintes des jeux trop simples, fit observer que, si l'on est dans l'incapacité de déterminer *a priori* les probabilités des issues, il est possible de le faire *a posteriori*, à savoir sur la base des fréquences relevées lors de la répétition de l'expérience. Siméon Poisson crut même bon d'opposer la *probabilité* d'obtenir pile, à savoir 1/2 si l'on ne perçoit pas *a priori* de causes de dissymétrie, avec la *chance* de pile, dont seule l'observation peut révéler *a posteriori* si elle diffère ou non de 1/2.

Avec une épreuve répétable indéfiniment et à l'identique, il paraît effectivement très raisonnable de se baser sur les fréquences observées pour déterminer les probabilités. La loi des grands nombres de Bernoulli incite à prendre la limite de la fréquence comme une bonne approximation de la probabilité. En pratique, on peut estimer la limite atteinte lorsque les ultimes valeurs de la fréquence offrent une stabilité jugée suffisante. Encore conviendrait-il de pouvoir préciser en quoi il est légitime de la juger telle. Une stabilisation à 0,5001 pour la fréquence de pile obtenue en dix mille lancers d'une pièce incite à croire en l'équiprobabilité. Mais que réserve la suite de tous les lancers théoriquement possibles ? Dix mille n'est rien du tout par rapport à l'infini. Nous jugeons néanmoins que retenir 0,5 est raisonnable par la considération de la situation dans son ensemble : on ne voit pas où pourraient se cacher les causes d'une future inégalité notable entre pile et face.

La position fréquentiste stricte consiste à ne pas vouloir envisager d'autres probabilités que les fréquences observées pour les issues. Elle relève explicitement d'une recherche d'objectivité : l'expérience révèle la probabilité réelle d'un événement, sur laquelle les esprits ne sont pas tenus de s'accorder *a priori*. Cette prétention à l'objectivité a valu au fréquentisme une grande faveur au XIX^{e} siècle chez ceux qui, comme Cournot, estimaient que cette jonction de l'expérience et des nombres rendait inutiles les considérations « philosophiques ». Elle a longtemps animé la statistique inférentielle, qui ne peut conclure des échantillon à la population entière qu'en termes probabilistes.

L'idée est même qu'une probabilité est comme une propriété interne aux choses (la chance, au sens de Poisson), que l'observation des fréquences est une façon de l'observer et que cela seul permet l'objectivité nécessaire à la scientificité. D'où la dénonciation comme subjectives des probabilités estimées *a priori*.

Les difficultés du fréquentisme sont cependant considérables.

- La loi des grands nombres fonde la confiance dans l'appel aux fréquences. Attention toutefois à ne pas lui faire dire ce qu'elle ne dit pas, même en la vulgarisant : elle n'affirme pas que la fréquence va se rapprocher de plus en plus de la probabilité, mais que c'est hautement probable. S'appuyer dessus pour prétendre définir la probabilité par la limite de la fréquence est, pour le coup, franchement circulaire.
- Le passage à la limite, déjà évoqué, est très long à se réaliser. Une stabilisation apparente de la fréquence observée ne garantit en rien contre une évolution autre ultérieurement.
- Un événement unique ne peut se voir attribuer une probabilité puisque, par hypothèse, il ne donne pas lieu à répétition. Les probabilités seraient donc illégitimes en bien des domaines, entre autres dans les questions économiques.

Pour appréhender de telles situations, et plus largement pour trouver un sens à divers énoncés, les fréquentistes doivent se livrer à d'impressionnantes contorsions, comme faire entrer dans les raisonnements la répétition imaginaire d'une épreuve.

Jusqu'à quel point d'ailleurs les tenants de ce rigorisme adhèrent-ils *in petto* à cette position ? Quel fréquentiste risquerait ce qu'il a de plus cher sur la sortie d'une boule verte perdue parmi un million de boules bleues lors d'un tirage élémentaire, le matériel étant neuf, voire constitué avec un matériau tout nouveau, et ne permettant donc en aucune façon d'arguer d'expériences passées ?

En dépit de ces difficultés, la position fréquentiste conserve des partisans. Le retour au point de vue des origines, parfois qualifié d'épistémique, ne s'en est pas moins développé avec constance, illustré par les noms de Keynes et de Carnap dans une optique logicienne ; puis, entre autres, avec le courant néo-bayésien en statistiques inférentielles ; des disciplines récentes, telles que l'intelligence artificielle, poussent dans ce sens. Dans cette mouvance les fréquences sont tenues pour un moyen parmi d'autres d'estimer les probabilités, pas toujours praticable, utile en tant que précieux complément d'information. Si un phénomène naturel se réalise avec la fréquence 0,25 lors d'observations répétées, il n'y a pas à conclure que ce quart est tel quel dans les choses. Il faut s'en tenir à considérer que, notre connaissance se limitant à cela, il est raisonnable, dans l'état actuel des choses, d'adopter 1/4 comme probabilité. Rien ne dit vraiment que de nouvelles et nombreuses répétitions de l'épreuve ne suggéreraient pas ensuit 0,27.

c. Calculs élémentaires

Les formules de base, comme celles qui concernent p($\bar{A}$) et p(A ∪ B), s'établissent d'abord dans le cas d'un tirage élémentaire symétrique quelconque, en raisonnant sur les nombres de cas favorables : $p(\bar{A}) = n(\bar{A}) / N = [N - n(A)] / N = 1 - p(A)$. De là se déduit leur validité pour toute épreuve non équiprobable, par appel, en toute généralité, à un modèle symétrique équivalent : p (A), relative à l'épreuve, est égale à *p* (*A*) relative au tirage équiprobable équivalent à l'épreuve ; la validité des formules pour les *p* (*A*) se transmet aux p (A). On s'assure en outre que ces formules restent valable dans les cas d'univers infini.

Pour deux épreuves successives identiques et indépendantes (tirage répété dans les mêmes conditions), on établit que $p(A, B) = p(A) \times p(B)$, formule dont le premier membre est à lire « probabilité de A puis B » (et non « de A et B »). Par identiques on entend : suffisamment semblables pour qu'il soit jugé que les épreuves se déroulent dans les mêmes conditions.

Soient A et B deux événements relatifs à une même épreuve (ce qui n'est pas le cas ci-dessus). L'intervention d'une information supplémentaire selon laquelle A est tenu pour réalisé a pour effet une restriction de l'univers à l'ensemble des éventualités susceptibles de réaliser A. Dans la formule de probabilité conditionnelle qui en résulte, à savoir $p(B/A) = p(A \cap B) / p(A)$, (B/A) se lit de façon neutre « B conditionné par A ». Les lectures « B sachant A » et « B si A » exigent de savoir si l'information est vraie ou si elle est seulement supposée.

3. Le domaine des probabilités

Le calcul des probabilités a longtemps concerné les seuls événements, au point que l'axiomatique ensembliste a entériné le vocabulaire qui les concerne. Or voilà que ce calcul se voit de plus en plus appliqué à autre chose. La probabilité des propositions, après avoir fait l'objet de travaux en rapport avec le thème de l'induction, il y a quelques décennies, est désormais prise en compte par l'intelligence artificielle : les robots en veulent. À y bien regarder, on assiste là au retour de ce qui avait été mis de côté du fait d'une attention portée de façon trop exclusive aux événements lors de la quantification de la notion de probabilité.

a. Les catégories en jeu

Comment le glissement qui s'observe, de manière exemplaire dans la *Logique* de Port-Royal où la probabilité est celle des opinions avant de devenir, sans crier gare, celle des événements, a-t-il pu se produire ? Le fond est que la vraisemblance, et la probabilité par voie de conséquence, concernent tout ce en quoi il peut y avoir de l'incertitude : des événements bien sûr, mais aussi des faits, des vérités, des assertions, des jugements, des opinions. Survolons ce domaine et repérons y quelques voisinages et connexions.

Événements et opinions

Un événement futur, ou bien passé mais encore inconnu, bref un événement encore à connaître, donne l'occasion d'une opinion plus ou moins empreinte d'incertitude quant à sa survenue. Il est très probable, c'est-à-dire très vraisemblable, que de l'urne contenant dix-neuf bleues et une rouge, il va sortir une boule bleue. Ce n'est pas une vérité tout à fait assurée, mais c'en a l'allure. En ce sens un événement donne lieu à une opinion.

Inversement, étant donnée une opinion, il y a souvent matière à lui lier un événement, à savoir la révélation de la valeur de l'opinion. L'expérience aléatoire réside dans l'opération ou le phénomène par quoi l'opinion se trouve confirmée ou infirmée. Il est permis, par exemple, de juger vraisemblable que le cœur de la Terre comporte de la matière en fusion ; en vertu de cette opinion, il est probable que cette matière jaillirait si l'on creusait jusque là pour le vérifier.

Ces correspondances entre les notions d'opinion et d'événement permettent de comprendre que celle de probabilité, au sens initial, ait pu s'appliquer à l'une comme à l'autre.

Événements, faits, vérités, opinions

On rencontre aussi la notion de probabilité directement appliquée à celle de fait. L'incertitude porte sur les faits singuliers, tant passés que présents ou à venir. Or un événement n'est jamais que l'instauration d'un fait singulier. La sortie d'une boule bleue est un événement se produisant ; un fait a lieu à cette occasion, à savoir qu'une boule bleue est sortie. Une boule ayant été tirée, il est légitime de se demander s'il est probable qu'elle soit bleue ; ce faisant, on s'interroge sur la probabilité d'un fait. Tous les faits, cependant, n'ont pas besoin d'un événement qui les instaure : si le dieu des savants et des philosophes existe, ce fait là ne relève, à ce qu'il semblerait, d'aucun événement.

Par ailleurs, un fait singulier (particulier comme il se dit aussi) n'étant jamais qu'une vérité particulière, un fait incertain n'est ni plus ni moins qu'une vérité incertaine, une prétendue vérité sans doute. Le fait et la vérité sont comme les deux faces d'une même chose. Le fait est ce qu'il en est dans la réalité ; la vérité est du côté de la pensée et du langage : elle est leur adéquation avec la réalité. On dit indifféremment qu'il est vrai qu'une boule bleue est sortie et que c'est un fait.

Le cas des vérités générales, parmi lesquelles prennent place les lois et, avec ces dernières, les faits généraux, est plus compliqué ; il fait l'objet de délicates recherches logiques en liaison avec le problème de l'induction.

Sur quelque prétendue vérité porte-t-elle, générale ou particulière, une opinion est plus ou moins vraisemblable, pour quelqu'un, à un certain moment : « Et ainsi les actions de la vie ne souffrant souvent aucun délai, c'est une vérité très certaine que, lorsqu'il n'est pas en notre pouvoir de discerner les plus vraies opinions, nous devons suivre les plus probables ».

Vérités, assertions, propositions et jugements

Appelons *assertion* tout énoncé (affirmatif ou négatif quant à sa forme grammaticale) se donnant comme vrai ou faux, ou susceptible de l'être (à la différence des questions, des ordres, des objurgations, etc.). Une assertion peut donc faire l'objet d'une opinion. Énonçant une vérité, l'incertitude, qui porte sur cette dernière, touche aussi bien l'assertion qui l'exprime. Le cosmologue estime vraisemblable que l'Univers a eu un commencement ; l'assertion « l'Univers a eu un commencement » peut elle aussi être qualifiée de probable.

Certains d'ailleurs estiment utile de traiter également de la probabilité d'une *proposition*, au sens que la logique donne à ce mot, et c'est le cas en intelligence artificielle. Assertion et proposition logique sont des notions très voisines, pas toujours distinguées. Qui tient à voir dans une proposition un pur assemblage de mots ou de symboles, plutôt que la pensée qu'il a charge d'exprimer, préférera peut-être appeler *jugement* cette pensée, comme il se faisait jadis.

Probabilité et certitude

Il convient de prendre garde aux deux emplois des mots *certitude* et *incertitude* qui ont cours en ces matières. On dit de quelqu'un qu'il est certain que tel événement se produira ; on dit aussi d'un événement qu'il est certain. Dans le premier cas le sens peut être qualifié de subjectif, avec toutes les précautions que cela appelle ; dans le second on peut parler de sens objectif pour traduire l'idée que la certitude est attribuée à l'objet, ici l'événement ou sa survenue. L'incertitude subjective peut être individuelle ; elle peut aussi être collective, éventuellement même être le fait d'une communauté scientifique tout entière.

Lorsque l'on dit – chose courante – que la probabilité mesure le degré de certitude, ce mot est généralement pris au sens objectif. La probabilité maximale correspond à l'événement certain et la probabilité nulle à l'événement impossible. Or la certitude subjective s'accorde autrement : elle est maximale pour $p(A) = 0$ tout autant que pour $p(A) = 1$. Un événement étant qualifié d'impossible au vu de sa probabilité nulle, on est tout à fait certain qu'il ne se produira pas. L'incertitude subjective est maximale lorsque $p(A) = 1/2$ [*].

b. Probabilisation d'une assertion

Comment envisager, dans le principe, qu'une assertion (ou une opinion, ou un fait) puisse se faire attribuer une probabilité ? À l'instar des événements, on vise à constituer une échelle des degrés de vraisemblance. Celle-ci peut commencer par être verbale. Elle peut comporter, par exemple, cinq degrés constitutifs d'un ordre total : faux, douteux, indifférent, plausible, vrai.

Le rapprochement entre assertion et événement, comme il a été remarqué, tient pour partie à ce que l'assertion est imaginée comme pouvant révéler sa vérité ou sa fausseté en une certaine occasion ; car il y a alors événement : la révélation elle-même. Cette occasion de révélation doit avoir quelque chose d'une expérience aléatoire : le résultat en est imprévisible par quelqu'un auparavant ; une fois que l'épreuve a eu lieu, il est connu de cette personne. Cela permet d'assimiler cette expérience à un tirage. Le degré de vraisemblance de l'assertion est alors, par définition, celui de l'événement qui, dans le tirage, correspond à la révélation.

En pratique l'attribution d'une probabilité à une opinion se fait de manière grossière : pour telle personne, aujourd'hui, il y a une chance sur deux pour que le dieu des savants et des philosophes existe. Ceci exprime un rapport de force sommairement évalué entre deux idées contraires. Les fréquences sont évidemment incongrues en ces matières qui peuvent être toutes subjectives, ou plutôt personnelles.

Soit une assertion A du type « X a vu le phénomène se produire ». Admettons que l'occasion de révélation de la vérité ou de la fausseté de A pour Y soit une déclaration de X sur le sujet. Le résultat de cette expérience, laquelle est supposée aléatoire pour Y, est un événement E tel que « X déclare avoir vu le phénomène », à moins qu'au contraire X dise ne pas avoir vu le phénomène.

[*] Entendue comme conviction, comme fermeté du jugement, la certitude subjective pourrait se mesurer par la grandeur arithmétique $c = |\bar{c}|$, où $\bar{c}$, égale à $p - 1/2$, pourrait être appelé la certitude algébrique (p étant la probabilité). À moins de préférer $\bar{c} = 2p - 1$ pour que $\bar{c}$ varie de -1 à $+1$.

L'expérience aléatoire en question peut être modélisée par le tirage d'une boule parmi trois bleues et une rouge, si Y estime que cette proportion traduit assez convenablement son sentiment sur ce que X va déclarer.

c. Connecteurs

Les assertions envisagées peuvent donner lieu à des définitions des connecteurs voisines de ce qui se fait en calcul des propositions ; encore faut-il ménager sa place au vraisemblable (et à l'invraisemblable) entre le vrai et le faux. A étant une assertion, non-A est l'assertion portant sur la même chose que A, fausse si A est vraie, vraie si A est fausse ; et paraissant plus ou moins vraie, ce d'autant que A paraît plus ou moins fausse.

Les assertions A et les événements associés E doivent se correspondre à tout point de vue. Les opérations sur les unes et les autres doivent être analogues au point qu'il y ait isomorphie, en ce que les connecteurs (unaires ou binaires) relatifs aux assertions doivent correspondre adéquatement aux les opérateurs ensemblistes (OU avec $\cup$, etc.). Si A est une assertion et si E est l'événement associé, à non-A (alias $\neg$A) correspond le contraire $\bar{E}$ de E.

Se pose, dans ces conditions, le problème de l'équivalent logique de la probabilité conditionnelle. Notons $\rightarrow$ le connecteur appelé conditionnel (et parfois encore implication) ; gardons $\Rightarrow$ pour l'implication mathématique (le *si... alors...* des raisonnements). On peut tenter des calculs du genre de : $p\ (A \rightarrow B) = p\ (\neg A \vee B) = p\ (\neg\ (A \wedge \neg B)) = 1 - p\ (A \wedge \neg B)$.

Relevons enfin que, tandis que p (B/A) est reconnu être *a priori* différent de $p\ (A \rightarrow B)$, selon certains on aurait $p\ (B/A) = p\ (A \Rightarrow B)$. Toutefois le symbolisme B/A évoquant, à propos de A, tantôt une supposition (si A alors B), tantôt un fait (B sachant que A ; ou encore : A donc B), il conviendrait d'y regarder de très près.